

# TERAPAN FUNGSI DENSITAS EMPIRIK DENGAN PENDEKATAN DERET FOURIER UNTUK ESTIMASI DIAGRAM PENGENDALI KUALITAS

Rukun Santoso

Program Studi Statistik Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

**Abstract.** Any continues function on the Hilbert space  $L^2[-\pi, \pi]$  can be represented as Fourier series. By this fact, a density function can be estimated by Fourier series as estimator of continues function on  $L^2[-\pi, \pi]$ . Further, this function estimator will be used to derive process parameters that needed on the control quality chart design

**Key words:** Control chart, Fourier series, orthonormal series, density function

## 1. PENDAHULUAN

Pembuatan diagram pengendali (diagram Shewhart) untuk variabel pada pengendalian kualitas statistik umumnya didasarkan pada asumsi bahwa proses berdistribusi normal dengan rata-rata  $\mu$  dan simpangan baku  $\sigma$ . Jika asumsi kenormalan tidak dipenuhi, terdapat perbedaan atas resiko  $\alpha$  yang sebenarnya dengan yang diasumsikan [2].

Penelitian ini menyelidiki rancangan diagram pengendali berdasarkan fungsi densitas empirik yang dibangun dengan pendekatan deret Fourier, yaitu melalui pendekatan deret di  $L^2[-\pi, \pi]$  dengan basis  $\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \sin(nx), \cos(nx), n=1,2,\dots \}$  yang merupakan *Complete Orthonormal System* (CONS). Deret Fourier sebagai CONS telah dibahas antara lain oleh [5]. Metode pendekatan fungsi kontinu dengan deret Fourier telah dibahas antara lain oleh [1,3].

Karena metode ini memerlukan banyak perhitungan numerik maka untuk memudahkan pekerjaan dan mendapatkan hasil yang memuaskan diperlukan bantuan komputer. Dalam tulisan ini simulasi komputer dikerjakan dengan paket S-Plus yang memungkinkan memadukan antara pemrograman, perhitungan statistik dan komputer grafis [4].

## 2. FUNGSI DALAM $L_2(R)$

Diberikan  $f$  fungsi terukur yang didefinisikan pada himpunan terukur  $E \subset R$ . Fungsi  $f$  dikatakan terintegral kuadrat (Lebesgue) jika  $f^2$  terintegral Lebesgue pada  $E$ . Himpunan semua fungsi terukur yang terintegral kuadrat pada  $E$  dinotasikan dengan  $L_2(E)$  dan dirumuskan dengan

$$L_2(E) = \left\{ f : \int_E f^2 < \infty \right\},$$

yang merupakan ruang linier. Lebih lanjut norma  $\|\bullet\|$  dengan aturan jika  $f \in L_2(E)$

didefinisikan  $\|f\| = \left\{ \int_E f^2 \right\}^{1/2}$  maka  $L_2(E)$

merupakan ruang Banach.

Jika  $L_2(E)$  diperlengkapi dengan *inner product*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dengan aturan jika  $f, g \in L_2(E)$  didefinisikan  $\langle f, g \rangle = \int_E fg$  maka

$L_2(E)$  merupakan ruang pre Hilbert. Lebih lanjut ruang pre Hilbert  $L_2(E)$  terhadap norma  $\|\bullet\|$  di atas merupakan ruang Hilbert.

### Definisi 2.1

Dua fungsi  $f, g \in L_2(E)$  dikatakan saling ortogonal jika  $\langle f, g \rangle = 0$ .

### Definisi 2.2

Barisan fungsi  $\{f_n\} \subset L_2(E)$  dikatakan ortonormal jika untuk setiap indeks  $i$  berlaku  $\|f_i\| = \sqrt{\langle f_i, f_i \rangle} = 1$  dan  $\langle f_i, f_j \rangle = 0$  untuk  $i \neq j$ .

### Definisi 2.3

Barisan fungsi  $\{f_n\} \subset L_2(E)$  dikatakan sistem ortonormal lengkap (Complete Orthonormal System=CONS) jika  $\{f_n\}$  ortonormal dan jika  $g \in L_2(E)$  sedemikian hingga  $\langle f_i, g \rangle = 0$  untuk setiap indeks  $i$ , maka  $g$  adalah fungsi nol.

**Teorema 2.1.** Jika  $\{f_n\} \subset L_2(E)$  merupakan sistem orto-normal lengkap maka untuk setiap  $f \in L_2(E)$  dapat dinyatakan sebagai

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle f_i.$$

### Bukti.

Diketahui  $\{f_n\}$  CONS berarti jika  $g \in L_2(E)$  dan  $\langle f_i, g \rangle = 0$  untuk setiap  $i$  maka  $g = 0$ .

Ambil  $g = f - \sum_{i=1}^n \langle f, f_i \rangle f_i$  maka untuk sebarang indeks  $k$  berlaku

$$\left\langle f - \sum_{i=1}^n \langle f, f_i \rangle f_i, f_k \right\rangle = 0 \quad \text{dengan kata}$$

lain  $f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle f_i$ . ■

Jika diambil  $h_0 = 1/\sqrt{2\pi}$ ,  $g_1 = \pi^{1/2} \sin(nx)$ , dan  $h_1 = \pi^{1/2} \cos(nx)$ , maka barisan fungsi  $\{h_0, g_1, h_1, \dots, n=1,2,3,\dots\}$  membentuk barisan fungsi CONS yang merupakan basis dalam  $L^2[-\pi, \pi]$ . Selanjutnya jika  $f \in L^2[-\pi, \pi]$  maka ekspansi Fourier dari  $f$  adalah

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)), \quad (2.1.)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_j &= \left\langle f, \pi^{-1/2} \cos(jx) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(jx) dx, \quad j = 0, 1, 2, \dots \\ b_j &= \left\langle f, \pi^{-1/2} \sin(jx) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(jx) dx, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

## 3. FUNGSI DENSITAS EMPIRIK

Jika  $F(x)$  menyatakan fungsi distribusi kumulatif (CDF) dari random variabel  $X$  maka peluang suatu observasi sama dengan atau lebih kecil dari  $x$  adalah  $P(X \leq x) = F(x)$ . Karena fungsi densitas  $f(x)$  didefinisikan sebagai turunan dari  $F(x)$  maka dapat dituliskan sebagai:

$$f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2\lambda} (F(x+\lambda) - F(x-\lambda)).$$

Fungsi densitas ini dapat ditaksir dengan fungsi densitas empirik

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2\lambda} (F^{\sim}(x+\lambda) - F^{\sim}(x-\lambda)) \\ &= \frac{1}{2n\lambda} \cdot \#x, \end{aligned}$$

dengan  $\#x$  menyatakan banyaknya data yang berada dalam interval  $(x-\lambda, x+\lambda]$ .

Jika didefinisikan fungsi kernel

$$K(x) = \begin{cases} 1/2 & -1 < x \leq 1 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases},$$

maka fungsi densitas empirik di atas dapat dituliskan sebagai

$$\hat{f}_{\lambda}(x) = \frac{1}{n\lambda} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{\lambda}\right), \quad (3.1)$$

$X_i$ =sampel ke- $i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ .

## 4. PENDUGA KASAR FUNGSI DENSITAS

Penduga kasar dari suatu fungsi densitas dapat diberikan dalam suku-suku fungsi delta Dirac  $\delta(x)$ . Adapun fungsi delta Dirac didefinisikan sebagai:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x \neq 0 \\ \infty & \text{jika } x = 0 \end{cases},$$

dan dilengkapi sifat  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ .

Dari persamaan (3.1) jika diambil  $\lambda \rightarrow 0$  akan diperoleh penduga kasar fungsi densitas

$$\begin{aligned} f_{\sim}(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{f}_{\lambda}(x) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{n\lambda} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \infty \cdot \sum_{i=1}^n \begin{cases} \frac{1}{2}, & x - X_i = 0 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(x - X_i), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$X_i$  = sampel ke- $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Jadi  $f_{\sim}$  diberikan dalam suku-suku fungsi delta Dirac dan mudah dipahami bahwa  $f_{\sim}$  memenuhi sifat-sifat fungsi densitas.

**Proposisi 1.** Jika  $\phi$  fungsi kontinu di  $x = x_0$

maka  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \phi(x) dx = \phi(x_0)$  dengan  $\delta$  fungsi delta Dirac.

**Bukti.**

Karena  $\phi(x)$  kontinu maka  $\phi(x) = \phi(x_0) + \varepsilon(x)$  dengan  $\varepsilon(x)$  kontinu sehingga

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \phi(x) dx &= \phi(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \varepsilon(x) dx \\ &= \phi(x_0) \end{aligned}$$

## 5. ESTIMASI DENSITAS DENGAN DERET FOURIER

Salah satu kriteria kebaikan dari estimator adalah sifat tidak bias. Statistik  $\hat{\theta}$  dikatakan sebagai estimator tak bias dari parameter  $\theta$  jika dipenuhi  $E(\hat{\theta}) = \theta$ . Berda-

sarkan kriteria ketidakbiasan, akan dicari estimator untuk koefisien deret Fourier dari fungsi densitas  $f$  yang belum diketahui bentuknya dan akan diestimasi dengan suatu fungsi hampiran

$$\hat{f}(x) = \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{a}_j \cos(jx) + \hat{b}_j \sin(jx)),$$

dengan  $\hat{a}_0, \hat{a}_j$ , dan  $\hat{b}_j$  adalah koefisien Fourier empirik yang dihitung berdasarkan data sampel.

Diberikan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sampel random identik independen yang didefinisikan pada interval  $[-\pi, \pi]$ . Dengan mengambil rumus (4.1) sebagai penduga kasar dari fungsi densitas dan dengan memperhatikan rumus (2.2) dan (2.3) dibentuk penduga koefisien Fourier sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \hat{a}_j &= \int_{-\pi}^{\pi} f_{\sim}(x) \cos(jx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(x - X_i) \cos(jx) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^n \cos(jX_i), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ \hat{b}_j &= \int_{-\pi}^{\pi} f_{\sim}(x) \sin(jx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(x - X_i) \sin(jx) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^n \sin(jX_i), \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ketakbiasan penaksir di atas dapat dibuktikan sebagai berikut :

$$E(\hat{a}_j) = \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(jx) dx \right) = a_j$$

$j = 0, 1, 2, \dots$

$$E(\hat{b}_j) = \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(jx) dx \right) = b_j$$

$j = 1, 2, 3, \dots$

Jadi diperoleh

$$\hat{a}_j = \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^n \cos(jX_i),$$

dan

$$\hat{b}_j = \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^n \sin(jX_i),$$

berturut-turut merupakan penaksir tak bias untuk  $a_j$  dan  $b_j$ .

Sejauh ini pembahasan hanya terbatas pada variabel random yang didefinisikan pada interval  $[-\pi, \pi]$ . Misalkan variabel random  $Y$  didefinisikan pada interval  $[a, b]$  maka perlu dilakukan transformasi ke dalam random variabel  $X$  pada interval  $[-\pi, \pi]$  agar penderetan Fourier dapat dilakukan. Bentuk transformasinya adalah  $x = \frac{2\pi(y-a)}{b-a} - \pi$ .

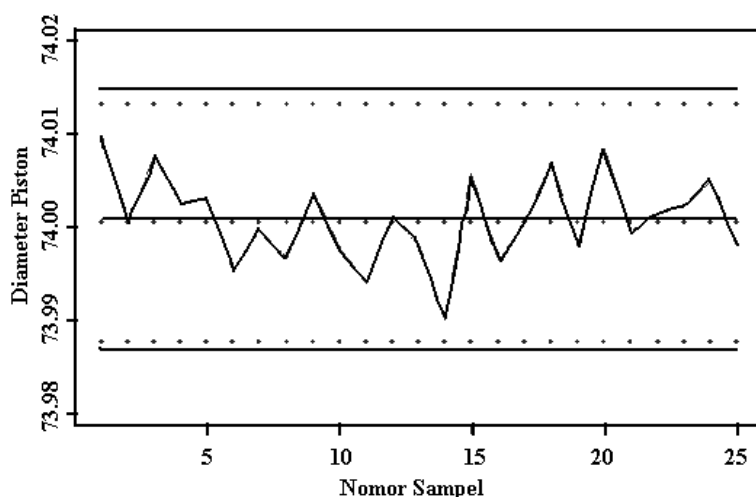
## 6. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk membandingkan bentuk diagram pengendali berdasarkan fungsi densitas hampiran dan berdasarkan asumsi kenormalan digunakan data diameter piston dari [2] yang telah diyakini berasal dari proses berdistribusi normal. Bentuk diagram kedua hasil perhitungan tersaji dalam gambar 6.1.

Kedua metode memberikan batas-batas pengendali yang sama, perbedaan kecil mungkin terjadi sebagai akibat pembulatan angka, sehingga kedua metode

memberikan penafsiran yang sama. Gambar 6.2 menggambarkan grafik pengendali  $\bar{X}$  dari suatu proses yang berdistribusi eksponensial dengan  $\lambda=0.5$ . Data percobaan diambil secara random melalui simulasi komputer dengan jumlah ulangan sebanyak 25 kali dan masing-masing berukuran 5. Penafsiran dari kedua metode pada kasus tersebut tidak memberikan perbedaan.

Gambar 6.3 menggambarkan grafik pengendali  $\bar{X}$  dari suatu proses yang berdistribusi eksponensial dengan  $\lambda=0.1$ . Percobaan dilakukan analogi dengan sebelumnya. Penafsiran dari kedua metode untuk kasus tersebut memberikan perbedaan sebagai akibat dari perbedaan batas-batas pengendali. Diagram pengendali standar dengan asumsi normalitas nampak memberikan lebar batas pengendali yang sempit sehingga akan menyebabkan peningkatan jumlah sampel yang berada di luar batas pengendali, sedangkan batas pengendali yang dibangun berdasarkan distribusi empirik memberikan batas pengendali yang lebih realistik.



### Keterangan

— hampiran Fourier

UCL = 74.0153

Center = 74.0012

LCL = 73.9870

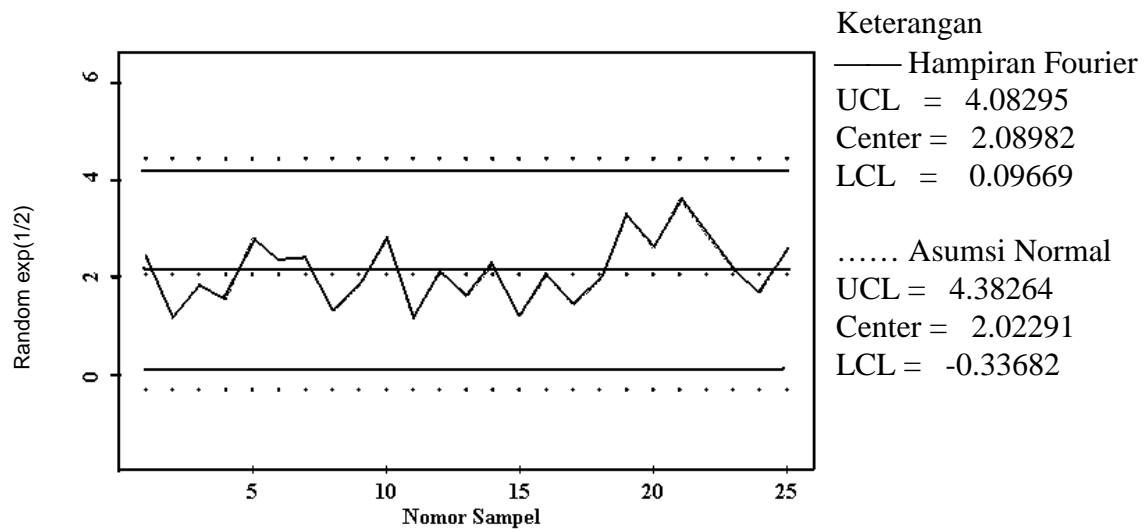
..... Asumsi Normal

UCL = 74.014

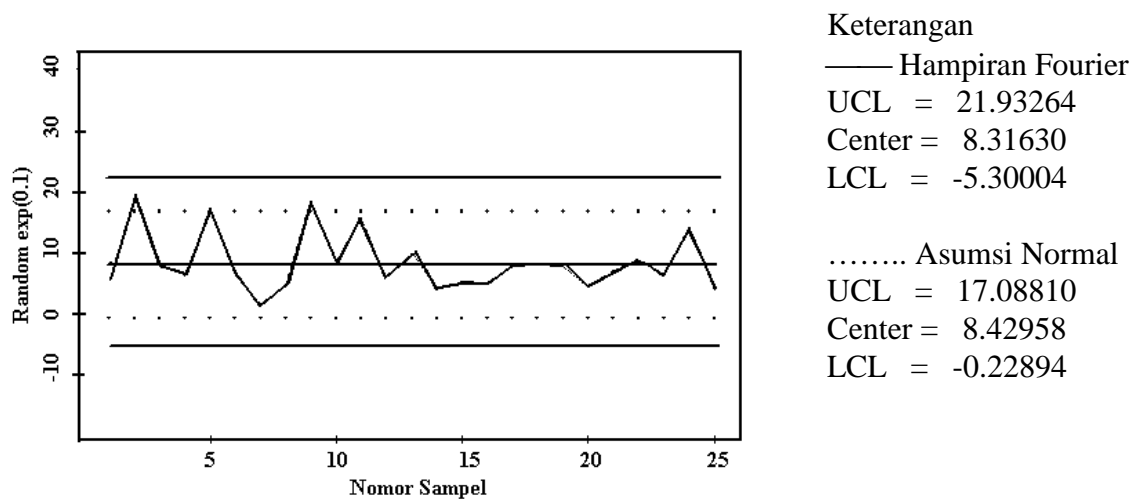
Center = 74.001

LCL = 73.988

Gambar 6.1. Diagram Pengendali  $\bar{X}$



Gambar 6.2 Diagram Pengendali  $\bar{X}$  Proses Random Exponensial(0.5)



Gambar 6.3. Diagram Pengendali  $\bar{X}$  Proses Random Exponensial (0.1)

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Brigham, E.O. (1988), *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, New Jersey.
- [2] Montgomery, D.C. (2001), *Introduction to Statistical Quality Control*, John Wiley
- [3] Ogden, R.Todd (1997), *Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis*, Birkhäuser: Berlin
- [4]. StatSci Division, (1995), *S-PLUS User Guide* Math Soft, Inc. Seattle.
- [5]. Walter, G.G (1994), *Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications*, CRC Press: Boca Raton, Florida.

## LAMPIRAN

### Mencari koefisien Fourier hampiran

```
function(X, j)
{
  lo.x <- min(X)
  up.x <- max(X)
  xbaku <- ((X - lo.x)/(up.x - lo.x)) * 2 * pi - pi
  x <- seq(-pi, pi, length = 1000)
  a0 <- (1/pi)
  y <- rep(0, 1000)
  a <- rep(0, j)
  b <- rep(0, j)
  for(i in 1:j) {
    ci <- cos(i * x)
    si <- sin(i * x)
    ai <- sum(cos(i * xbaku))/(length(xbaku) * pi)
    bi <- sum(sin(i * xbaku))/(length(xbaku) * pi)
    a[i] <- ai
    b[i] <- bi
    yi <- ai * ci + bi * si
    y <- y + yi
  }
  Y <- a0/2 + y
  win.graph()
  plot(x, Y, type = "l", main = paste("Densitas Fourier j=", j), xlab = "x", ylab =
    "densitas")
  cat("Mean = ", paste(mean(X)), " Range = ", paste(max(X) - min(X)), "\n")
  cat("=====", "\n")
  cat("      Estimasi koefisien Fourier", "\n")
  cat("=====", "\n")
  cat(" i !          a[i]          !          b[i]          !", "\n")
  cat("=====", "\n")
  cat(" 0 !", paste(a0), "\n")
  for(i in 1:j) {
    cat(" ", paste(i), " !", paste(a[i]), " !", paste(b[i]), " !", "\n")
  }
  cat("=====", "\n")
  return(c(a0, a, b))
}
```

### Menggambar diagram pengendali

```
function(a)
{
  X <- apply(a, 1, mean)
  lo.x <- min(X)
  up.x <- max(X)
  rata <- integrate(f1, -pi, pi)$integral
  momen2 <- integrate(f2, -pi, pi)$integral
  std <- sqrt(momen2 - rata^2)
  bak <- rata + 3 * std
  bbk <- rata - 3 * std
  rata <- ((rata + pi) * (up.x - lo.x))/(2 * pi) + lo.x
  bak <- ((bak + pi) * (up.x - lo.x))/(2 * pi) + lo.x
  bbk <- ((bbk + pi) * (up.x - lo.x))/(2 * pi) + lo.x
  cat(paste("Batas atas = ", bak), "\n")
  cat(paste("Garis tengah = ", rata), "\n")
  cat(paste("Batas bawah = ", bbk), "\n")
  absis <- c(1:length(X))
  plot(absis, X, xlim = c(1, length(X)), ylim = c(lo.x - 0.01, up.x + 0.01), type = "l",
    xlab = "nomor sampel", ylab = "diameter piston")
  par(new = T)
  plot(absis, rep(bak, length(X)), xlim = c(1, length(X)), ylim = c(lo.x - 0.01, up.x +
    0.01), type = "l", xlab = "", ylab = "")
  par(new = T)
  plot(absis, rep(bbk, length(X)), xlim = c(1, length(X)), ylim = c(lo.x - 0.01, up.x +
    0.01), type = "l", xlab = "", ylab = "")
  par(new = T)
  plot(absis, rep(rata, length(X)), xlim = c(1, length(X)), ylim = c(lo.x - 0.01, up.x +
    0.01), type = "l", xlab = "", ylab = "")
  par(new = T)
  plot(absis, rep(74.014, length(X)), xlim = c(1, length(X)), ylim = c(lo.x - 0.01, up.x
    +
    0.01), type = "p", xlab = "", ylab = "")
  par(new = T)
}
```

```
+      plot(absis, rep(73.988, length(X)), xlim = c(1, length(X)), ylim = c(lo.x - 0.01, up.x
+          0.01), type = "p", xlab = "", ylab = "")
+      par(new = T)
+      plot(absis, rep(74.001, length(X)), xlim = c(1, length(X)), ylim = c(lo.x - 0.01, up.x
+          0.01), type = "p", xlab = "", ylab = "")
+  }
```